Równania różniczkowe pierwszego rzędu

1 W farbiarni tekstylnej miesza się wodę i proszek barwiący w dużych kadziach, przygotowując roztwór do barwienia komercyjnych ilości wełny. Przy mieszaniu czerwonego barwnika, aby uzyskać wymaganą intensywność barwy, do kadzi zawierającej 100 litrów zimnej wody przez pomyłkę wsypano 150 gramów proszku barwiącego zamiast 100 gramów. Aby naprawić ten błąd, otwarto kran, którym zbyt skoncentrowany barwnik jest wylewany z szybkością 4 litrów na minutę. Jednocześnie do kadzi wlano 4 litry świeżej wody, cały czas mieszając płyn w celu utrzymania jednorodnej mieszaniny barwników. Ile czasu zajmie doprowadzenie barwnika do odpowiedniego poziomu intensywności?

Wskazówka:
Jeśli x reprezentuje podaną w gramach ilość rozpuszczonego proszku barwiącego w kadzi w dowolnym momencie, to utrata barwnika Δx w czasie Δt będzie w przybliżeniu równa $\dfrac{4\Delta t}{100}x$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Prawo chłodzenia Newtona mówi, że temperatura gorącego ciała spada proporcjonalnie do różnicy jego temperatury i temperatury otoczenia. To znaczy:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_o),$$

gdzie T jest temperaturą ciała, T_o temperaturą jego otoczenia, a k jest stałą dodatnią.

(a) Jeśli temperatura ciała jest wyższa niż jego otoczenia, to tempo zmian temperatury ciała jest ujemne. Czemu?

(b) Jeśli temperatura ciała jest niższa niż jego otoczenia, to tempo zmian temperatury ciała jest dodatnie. Czemu?

(c) Wykaż, że rozwiązania równania różniczkowego opisującego prawo chłodzenia Newtona mają postać:

$$T = \alpha e^{-kt} + T_o$$

(d) Temperatura ciała wynosi 200°C, a temperatura jego otoczenia utrzymywana jest na poziomie 100°C. Temperatura ciała spada do 150°C w ciągu minuty. Jak długo potrwa spadek temperatury do 125°C?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 Populacja bakterii rośnie w tempie proporcjonalnym do ilości obecnych bakterii.

(a) Wykaż, że można to wyrazić w postaci równania różniczkowego

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = kn(t),$$

gdzie $n(t)$ reprezentuje liczbę bakterii (przyjęto, że jest ona ciągła dla tego modelu), a k jest stałą dodatnią.

(b) Jeśli liczba bakterii potroi się w ciągu dwóch godzin, jak długo potrwa dziesięciokrotny wzrost?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

4 Izotop promieniotwórczy na skutek promieniowania traci dziesięć procent swojej masy w ciągu jednego roku. Jaki jest jego okres półtrwania?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

5 Radioaktywny izotop ma okres półtrwania 300 dni. Jak długo potrwa utrata 10% masy izotopu?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

6 Wieża chłodnicza ma minimalną powierzchnię całkowitą i dwa okręgi o różnych promieniach na każdym końcu. Przekrój powierzchni spełnia warunek

$$f''(x)f(x) - (f'(x))^2 = 1.$$

Wykaż, że

$f(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx)$, gdzie k jest stałą.

Wskazówka: Podstaw $u(x) = f'(x)$ i wykaż, że $f(x) = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f}$.

Rozwiązanie

7 Jeśli kamień zostanie rzucony w górę z klifu o wysokości 100 m nad plażą z prędkością początkową 20 metrów na sekundę, gdzie $g = 9{,}8$ metrów na sekundę^2, znajdź (przy założeniu braku oporu powietrza):

(a) jak wysoko wzniesie się kamień,
(b) ile czasu zajmie dotarcie kamienia na plażę,
(c) prędkość kamienia w momencie uderzenia w piasek.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

8 Pocisk został wystrzelony z powierzchni ziemi pionowo w górę z prędkością początkową v_0. Zakładając, że nie ma oporów powietrza, wykaż, że prędkość końcowa spełnia równanie różniczkowe:

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{gR^2}{r^2},$$

gdzie R jest promieniem Ziemi, a r to odległość pocisku od środka Ziemi. Następnie wykaż, że

$$v = \pm\sqrt{{v_0}^2 - 2\frac{Rg}{r}(r-R)}.$$

Rozwiązanie

9 Tempo wzrostu danej kultury mikroorganizmów wyraża równanie

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 6 + 3\sin 2\pi t,$$

gdzie m to masa w gramach po t dniach. Jeśli masa w czasie $t = 0$ wynosi 30 gramów, znajdź masę mikroorganizmów po 8 dniach.

Odpowiedź Rozwiązanie

Odpowiedzi

1 10,14 minut

Pytanie Rozwiązanie

2 (d) 2 minuty

Pytanie Rozwiązanie

3 (b) 4,2 godziny z dokładnością do jednego miejsca po przecinku

Pytanie Rozwiązanie

4 6,58 lat z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku

Pytanie Rozwiązanie

5 45,63 dni z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku

Pytanie Rozwiązanie

7 (a) 20,41 metrów nad klifem
(b) 7 sekund
(c) 48,6 metra na sekundę w dół

Pytanie Rozwiązanie

9 78 gramów

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Jeśli x reprezentuje ilość (g) rozpuszczonego proszku barwiącego w kadzi w dowolnym czasie t (min), to utrata barwnika w czasie Δt będzie wynosić Δx, gdzie $\Delta x \cong -\dfrac{4\Delta t}{100}x$. Jest to wartość ujemna, ponieważ ilość barwnika maleje.

Oznacza to, że

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong -\frac{4}{100}x,$$

co prowadzi do równania różniczkowego

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{100}x,$$

a rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{4}{100}\,\mathrm{d}t.$$

Następnie, całkując obie strony tego równania, mamy

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\frac{4}{100}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{100}\int\mathrm{d}t,$$

co daje rozwiązanie

$$\ln x = -\frac{4}{100}t + C = -0{,}04t + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą całkowania. Odwracając logarytm, mamy

$$x = e^{-0{,}04t+C} = e^{-0{,}04t}e^{C} = ke^{-0{,}04t}.$$

Ponieważ C jest dowolną stałą, możemy zastąpić e^C inną dowolną stałą k, co uprości dalsze obliczenia.

Zatem $x = ke^{-0,04t}$. Pozostaje teraz znaleźć wartość k, korzystając z warunków podanych w treści zadania. Wiemy, że w czasie $t = 0$, $x = 150$, więc podstawiając, otrzymujemy

$150 = ke^{-0,04 \cdot 0} = k$, zatem rozwiązaniem ogólnym jest $x = 150e^{-0,04t}$.

Planowana ilość proszku barwiącego wynosiła 100 g, a naszym zadaniem jest znalezienie czasu danego w minutach, potrzebnego na zmniejszenie aktualnej intensywności barwy do zamierzonej. Aby to zrobić, podstawiamy tę wartość za x w rozwiązaniu ogólnym i otrzymujemy

$100 = 150e^{-0,04t}$, czyli $\dfrac{100}{150} = e^{-0,04t}$.

Następnie logarytmując obie strony, mamy

$$\ln\left(\frac{100}{150}\right) = -0,04t,$$

a więc

$t = -\dfrac{1}{0,04}\ln\left(\dfrac{100}{150}\right) = 10,14$ minut z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Pytanie **Odpowiedź**

---

2 (a) Tempo zmian temperatury jest ujemne, ponieważ ciało chłodzi się, więc jego temperatura spada.

(b) Tempo zmian temperatury jest dodatnie, ponieważ ciało nagrzewa się, więc jego temperatura rośnie.

(c) Równanie różniczkowe $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_o)$ można rozwiązać, rozdzielając zmienne i całkując obie strony otrzymanego równania.

Czyli

$\dfrac{\mathrm{d}T}{(T - T_o)} = -k\,\mathrm{d}t$, a całkowanie daje $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}T}{(T - T_o)} = -k\int \mathrm{d}t$.

Po wykonaniu całkowania po lewej stronie otrzymujemy:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}T}{(T - T_o)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u + C_1 = \ln(T - T_o) + C_1$, gdzie C_1 jest dowolną stałą

i podstawiając $u = T - T_o$, mamy $\mathrm{d}u = \mathrm{d}T$ (zakładając, że temperatura otoczenia T_o jest stała).

Po wykonaniu całkowania po prawej stronie otrzymujemy:

$-k\int \mathrm{d}t = -kt + C_2$, gdzie C_2 jest dowolną stałą.

Przyrównanie lewej strony do prawej daje:

$\ln(T - T_o) + C_1 = -kt + C_2$, zatem $\ln(T - T_o) = -kt + C$,

gdzie $C = C_2 - C_1$. Odwracając logarytm, mamy

$T - T_o = e^{-kt+C} = \alpha e^{-kt}$, skąd $T = \alpha e^{-kt} + T_o$, gdzie $\alpha = e^C$.

(d) Teraz potrzebujemy znaleźć wartości α oraz k na podstawie informacji danych w treści zadania. Wiemy, że jeśli $t = 0$, to $T = 200$ i $T_o = 100$.

Podstawiając te dane do rozwiązania ogólnego, mamy

$200 = \alpha e^{-k\cdot 0} + 100$, tak więc $\alpha = 100$, a zatem $T = 100e^{-kt} + 100$.

Także wiemy, że jeśli $t = 1$, to $T = 150$ i $T_o = 100$. Stąd mamy

$150 = 100e^{-k\cdot 1} + 100$, tak więc $100e^{-k} = 50$, co daje $e^{-k} = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$.

Następnie logarytmując obie strony, otrzymujemy

$-k = \ln(0{,}5) = -0{,}693$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Ostatecznym rozwiązaniem równania różniczkowego jest zatem

$T = 100e^{-0{,}693t} + 100$.

Wreszcie, aby znaleźć czas potrzebny na spadek temperatury ciała do 125°C, podstawiamy daną temperaturę ciała do otrzymanego wzoru, co daje

$125 = 100e^{-0{,}693t} + 100$, czyli $e^{-0{,}693t} = 0{,}25$.

Logarytmując obie strony, otrzymujemy

$-0{,}693t = \ln 0{,}25 = -1{,}386$, a zatem $t = \dfrac{-1{,}386}{-0{,}693} = 2$ minuty.

Pytanie Odpowiedź

---

3 (a) Niech $n(t)$ reprezentuje liczbę bakterii obecnych w czasie t godzin. Wzrost bakterii można mierzyć tempem zmian bakterii, to znaczy tempem, w jakim zmienia się $n(t)$ względem czasu t.

Wyraża to zależność

$\dfrac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t}$.

Wiemy, że powyższa zależność jest proporcjonalna do ilości obecnych bakterii, czyli

$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} \propto n(t)$. Tak więc

$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = kn(t)$, gdzie k jest stałą proporcjonalności.

(b) To równanie różniczkowe można rozwiązać, rozdzielając zmienne, a następnie całkując. To znaczy:

$\frac{\mathrm{d}n(t)}{n(t)} = k\,\mathrm{d}t$, zatem $\int \frac{\mathrm{d}n(t)}{n(t)} = \int k\,\mathrm{d}t = k\int \mathrm{d}t$.

Konsekwentnie mamy $\ln n(t) = kt + C$, gdzie C jest dowolną stałą całkowania.

Odwrócenie logarytmu daje

$n(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}$, gdzie $A = e^C$.

Przy $t = 0$ mamy

$n(0) = Ae^0 = A$.

Skoro populacja bakterii potroiła się po dwóch godzinach, to dla $t = 2$ otrzymamy

$n(2) = Ae^{2k} = 3A$,

skąd $e^{2k} = 3$, dając $2k = \ln 3 = 1{,}0986$, skąd $k = 0{,}5493$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Podstawienie otrzymanej wartości k do naszego wzoru daje

$n(t) = n(0)e^{0{,}5493t}$.

Czas potrzebny na zwiększenie początkowej liczby bakterii dziesięciokrotnie można znaleźć, logarytmując

$10n(0) = n(0)e^{0{,}5493t}$. Zatem $0{,}5493t = \ln 10$,

skąd $t = 4{,}2$ godziny z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Pytanie **Odpowiedź**

---

4 Jeśli $x(t)$ reprezentuje ilość radioaktywnego izotopu obecnego w czasie t (lat), to fakt, że ilość wypromieniowana jest proporcjonalna do ilości dostępnej do wypromieniowania, można przedstawić wzorem

$x'(t) \propto x(t)$. Zatem $x'(t) = -kx(t)$,

gdzie $k > 0$ jest stałą proporcjonalności.
Prawa strona równania jest ujemna, ponieważ tempo zmian zmniejsza się wraz ze spadkiem ilości dostępnej do wypromieniowania.

Rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -kx(t), \text{ a zatem } \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -k\,\mathrm{d}t.$$

W wyniku całkowania mamy

$$\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int(-k\,\mathrm{d}t) = -k\int \mathrm{d}t, \text{ czyli}$$

$$\ln x(t) = -kt + C, \text{ zatem } x(t) = e^{-kt+C} = Ae^{-kt}, \text{ gdzie } A = e^{C}.$$

Teraz, w chwili $t = 0$, $x(0) = Ae^{-0} = A$, więc rozwiązanie równania różniczkowego możemy zapisać jako

$$x(t) = x(0)e^{-kt}.$$

Wiemy, że po $t = 1$ rok, $x(1) = 0{,}9x(0)$ (dziesięć procent wypromieniowało), zatem

$$x(1) = 0{,}9x(0) = x(0)e^{-k},$$

skąd $e^{-k} = 0{,}9$, co oznacza, że $-k = \ln 0{,}9 = -0{,}1054$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Tak więc

$$k = 0{,}1054, \text{ zatem } x(t) = x(0)e^{-0{,}1054t}.$$

Okres półtrwania to czas potrzebny do wypromieniowania połowy początkowej ilości. To znaczy, jeśli okres półtrwania to τ, wówczas

$$\frac{x(0)}{2} = x(0)e^{-0{,}1054\tau}, \text{ zatem } e^{-0{,}1054\tau} = 0{,}5.$$

Logarytmując obie strony tego równania, otrzymamy

$$-0{,}1054\tau = \ln 0{,}5 = -0{,}6931 \text{ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.}$$

Tak więc

$$\tau = \frac{-0{,}6931}{-0{,}1054} = 6{,}58 \text{ lat (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).}$$

Pytanie **Odpowiedź**

---

5 Jeśli $x(t)$ reprezentuje ilość radioaktywnego izotopu obecnego w czasie t (dni), to fakt, że ilość wypromieniowana jest proporcjonalna do ilości dostępnej do wypromieniowania, można przedstawić wzorem

$$x'(t) \propto x(t). \text{ Zatem } x'(t) = -kx(t),$$

gdzie $k > 0$ jest stałą proporcjonalności.

Prawa strona równania jest ujemna, ponieważ tempo zmian zmniejsza się wraz ze spadkiem ilości dostępnej do wypromieniowania.

Rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -kx(t), \text{ a zatem } \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -k\,\mathrm{d}t.$$

W wyniku całkowania mamy

$$\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int(-k\,\mathrm{d}t) = -k\int \mathrm{d}t,$$

czyli

$$\ln x(t) = -kt + C,$$

zatem

$$x(t) = e^{-kt+C} = Ae^{-kt}, \text{ gdzie } A = e^{C}.$$

Teraz, w chwili $t = 0$, $x(0) = Ae^{-0} = A$, więc rozwiązanie równania różniczkowego możemy zapisać jako

$$x(t) = x(0)e^{-kt}.$$

Wiemy, że okres półtrwania wynosi 300 dni, zatem

$$\frac{x(0)}{2} = x(0)e^{-300k}, \text{ więc } e^{-300k} = 0{,}5.$$

Logarytmując obie strony tego równania, otrzymamy

$-300k = \ln 0{,}5 = -0{,}6931$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Tak więc

$$k = \frac{-0{,}6931}{-300} = 0{,}00231 \text{ (z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku).}$$

Po podstawieniu wartości k do rozwiązania równania różniczkowego, otrzymamy

$$x(t) = x(0)e^{-0{,}00231t}.$$

Aby dowiedzieć się, w jakim czasie izotop utraci 10% swojej masy, postępujemy następująco:

Po czasie t dni stwierdzamy, że $x(t) = 0{,}9x(0)$ (dziesięć procent wypromieniowało). Zatem

$$x(t) = 0{,}9x(0) = x(0)e^{-0{,}00231t}, \text{ więc } e^{-0{,}00231t} = 0{,}9.$$

Logarytmując obie strony równania, otrzymamy

$-0{,}00231t = \ln 0{,}9 = -0{,}1054$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Zatem

$$t = \frac{-0{,}1054}{-0{,}00231} = 45{,}63 \text{ dni z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.}$$

Pytanie **Odpowiedź**

6 Niech $u(x) = f'(x)$, tak więc $u'(x) = f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f} \cdot \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f}$.

Podstawiając do pierwotnego równania różniczkowego, otrzymujemy

$u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f}f - u^2 = 1$, czyli $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f} - \dfrac{u}{f} = f^{-1}u^{-1}$, które jest równaniem Bernoulliego.

Aby rozwiązać to równanie, wstawiamy kolejną funkcję niewiadomą

$z = u^2$, zatem $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Podstawienie daje (po podzieleniu równania Bernoulliego przez u^{-1})

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}f} - \frac{u^2}{f} = f^{-1},$$

zatem

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f} - \frac{z}{f} = f^{-1}, \text{ czyli } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f} - \frac{2z}{f} = 2f^{-1}.$$

To równanie można rozwiązać za pomocą czynnika całkującego

$e^{\int(-2/f)\,\mathrm{d}f} = e^{-2\ln f} = f^{-2}$, tak więc:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{f^{-2}}\int 2f^{-1}f^{-2}\,\mathrm{d}f \\ &= \frac{2}{f^{-2}}\left[\frac{f^{-2}}{-2} + C\right] \\ &= Cf^2 - 1 \\ &= k^2f^2 - 1, \text{ gdzie } C = k^2 \text{ dla wygody zapisu.} \end{aligned}$$

Zatem $z = u^2 = k^2f^2 - 1$, tak więc $u = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = k^2f^2 - 1$.

Rozdzielanie zmiennych i całkowanie daje całkę

$\displaystyle\int \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{k^2f^2 - 1}}$ z rozwiązaniem $kx = \cosh^{-1} kf$.

Stąd $kf = \cosh(kx)$, zatem

$$f(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx).$$

Pytanie

7 (a) $y(t) = \dfrac{gt^2}{2} + At + B$. Jeśli $y(0) = 100$ i $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 20$, to:

$$y(0) = -\frac{g0^2}{2} + A0 + B = B = 100$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -gt + A, \text{ więc } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = -g0 + A = A = 20$$

Zatem:

$$y(t) = -\frac{9{,}8t^2}{2} + 20t + 100 \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -9{,}8t + 20$$

Kamień osiąga maksymalną wysokość, jeśli $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, czyli gdy

$-9{,}8t + 20 = 0$, skąd $t = \frac{20}{9{,}8} = 2{,}04$ s.

W tym czasie $y(2{,}04) = -\frac{9{,}8(2{,}04)^2}{2} + 20(2{,}04) + 100 = 120{,}41$ m, czyli 20,41 metrów nad klifem.

(b) Kamień upadnie na plażę, gdy $y(t) = 0$, czyli gdy

$$y(t) = -\frac{9{,}8t^2}{2} + 20t + 100 = 0.$$

Aby znaleźć ten czas, musimy rozwiązać równanie kwadratowe

$$-\frac{9{,}8t^2}{2} + 20t + 100 = 0, \text{ czyli } 4{,}9t^2 - 20t - 100 = 0.$$

Rozwiązaniem jest wtedy

$$t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-100)}}{2 \cdot 4{,}9}.$$

To równanie ma więc dwa rozwiązania $t = 7{,}00$ lub $t = -2{,}92$. Rozwiązanie ujemne z oczywistych względów odrzucamy. Więc kamień spada na ziemię po upływie 7 sekund.

(c) Prędkość po 7 sekundach wynosi

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(7) = -9{,}8 \cdot 7 + 20 = -48{,}6 \text{ metra na sekundę.}$$

Czyli 48,6 metra na sekundę w dół – w ujemnym kierunku.

Pytanie **Odpowiedź**

---

8 Siła F działająca na pocisk wynika z grawitacji, która nadaje pociskowi przyspieszenie $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Siła ta jest proporcjonalna do masy i przyspieszenia, zatem

$$F = km\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

gdzie k to stała proporcjonalności, a m jest masą pocisku.
Zakładając, że pocisk porusza się wzdłuż linii prostej, gdzie r to przebyta odległość, mamy

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

Teraz korzystając ze wzoru Newtona na siłę grawitacji, mamy $F = -G\frac{Mm}{r^2}$, gdzie M to masa Ziemi, G to stała grawitacji, a r to odległość od środka Ziemi. Siła jest ujemna, ponieważ działa w kierunku przeciwnym do prędkości. Zatem

$$F = km\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kmv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -G\frac{Mm}{r^2},$$

a więc

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -G\frac{M/k}{r^2} = -\frac{K}{r^2}, \text{ gdzie } K = GM/k \text{ (stała).}$$

Jeśli $t = 0$, to $r = R$ (promień Ziemi), a przyspieszenie wynosi $-g$ (przyspieszenie ziemskie). Zatem

$$-g = -\frac{K}{R^2}, \text{ skąd } K = R^2g, \text{ tak więc } v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -g\frac{R^2}{r^2}.$$

Rozdzielając zmienne i całkując, otrzymujemy

$$v\mathrm{d}v = -g\frac{R^2}{r^2}\,\mathrm{d}r \text{ i } \int v\mathrm{d}v = -gR^2\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Czyli

$$\frac{v^2}{2} = gR^2r^{-1} + C,$$

a jeśli $r = R$, to $v = v_0$, dając $\frac{v_0^2}{2} = gR^2R^{-1} + C$, stąd $C = \frac{{v_0}^2}{2} - gR$.

Zatem

$$\frac{v^2}{2} = gR^2r^{-1} + \frac{{v_0}^2}{2} - gR,$$

dając $v^2 = {v_0}^2 + 2gR^2r^{-1} - 2gR$ i dlatego

$$v^2 = {v_0}^2 + 2gR\left(\frac{R}{r} - 1\right) \text{ lub } v = \pm\sqrt{{v_0}^2 - 2gR\left(\frac{r-R}{r}\right)}.$$

Pytanie

---

9 Wiemy, że $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 6 + 3\sin 2\pi t$ oraz że w czasie $t = 0$ masa wynosi 30 gramów.

Całkując powyższe równanie, otrzymamy

$$\int\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int\mathrm{d}m = m = \int(6 + 3\sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 6t - 3\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + C,$$

gdzie C to stała całkowania. Teraz do $m = 6t - 3\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + C$ podstawiamy $t = 0$ oraz $m = 30$, co daje

$$30 = -\frac{3}{2\pi} + C.$$

Zatem $C = 30 + \dfrac{3}{2\pi}$, a końcowy wzór na masę to

$$m = 6t - \frac{3\cos 2\pi t}{2\pi} + 30 + \frac{3}{2\pi}.$$

Po 8 dniach

$$m = 6 \cdot 8 - \frac{3\cos 16\pi}{2\pi} + 30 + \frac{3}{2\pi} = 48 - \frac{3}{2\pi} + 30 + \frac{3}{2\pi} = 78 \text{ gramów.}$$

Pytanie Odpowiedź